



ISSN 2447-5378

Congress of Industrial  
Management and Aeronautical  
Technology

Fatec  
São José dos  
Campos  
Prof. Jessen Vidal

CPS  
Centro  
Paula Souza

SÃO PAULO  
GOVERNO DO ESTADO

# ESTUDO DA BOBINA DE HELMHOLTZ DE TRÊS EIXOS E SIMULAÇÃO DO SEU CONTROLE

G.D. Ribeiro<sup>1,\*</sup>; H.A. Fazzolari<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Fundação Universidade Federal do ABC  
Av. dos Estados, 5001 – Santa Terezinha, Santo André/SP,  
CEP.: 09210-580, Brasil.  
Telefone: (11) 3356-7617

\*[d.gabriel@aluno.ufabc.edu.br](mailto:d.gabriel@aluno.ufabc.edu.br)

**RESUMO:** A bobina de Helmholtz é um dispositivo formado por duas bobinas de mesmas dimensões físicas. É amplamente utilizada no estudo de sistemas espaciais, por gerar um campo magnético uniforme, enquanto que três bobinas de Helmholtz ortogonais entre si também geram campo magnético em qualquer direção. O sistema proposto neste artigo é do tipo zero, possuindo, portanto, no âmbito da teoria de controle, erro de regime permanente não nulo para entradas do tipo degrau. Ao operar as bobinas de Helmholtz em malha aberta, é necessário realizar a sua calibração. Objetiva-se, portanto, projetar um controlador que torne desnecessário o processo de calibração, além de obter um transitório desejado, erro de regime permanente nulo e robustez para ruídos de alta frequência, utilizando técnicas de projeto analíticas de alocação de polos para o controlador PID e por realimentação de estados. Os resultados obtidos se mostraram satisfatórios e foram comparados com resultados da literatura.

**PALAVRAS-CHAVE:** Bobina; Helmholtz; PID; Realimentação; Campo magnético.

The Helmholtz coil is a device containing two coils with same physical dimensions. It is widely used to study space systems, generating a uniform magnetic field, while three orthogonal Helmholtz coils also generate a magnetic field in any direction. The system proposed in this article is a type zero system, so, in control theory, a non-zero steady state error for step input. In open loop operation, it is necessary to do its calibration. The aim is to design a controller to eliminate the calibration, in addition to obtain a desired transient, null steady state error and robustness for high frequency noises, using analytical design techniques of PID controller pole allocation and state feedback. The results obtained were satisfactory and were compared with literature results.

**KEYWORDS:** Helmholtz; Coil; PID; Feedback; Magnetic field.

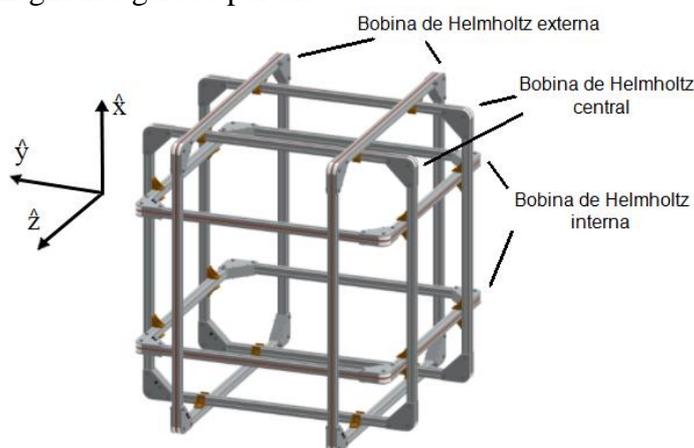
## 1. INTRODUÇÃO

A bobina de Helmholtz é um dispositivo formado por duas bobinas ligadas em série (a mesma intensidade de corrente elétrica em ambas), de mesmas dimensões físicas, posicionadas em paralelo, coaxiais, com número igual de espiras e separadas por uma distância fixa. Deste modo, o campo magnético gerado por elas é uniforme numa determinada região em torno do centro desse par e proporcional à corrente elétrica se ela for contínua e tiver o mesmo sentido nas duas bobinas (BATISTA, 2016).

A gaiola de Helmholtz ou bobina de Helmholtz de três eixos estudada para a realização deste projeto é formada por três bobinas de Helmholtz ortogonais e quadradas, cada uma com eixo de simetria coincidente a um dos eixos do espaço cartesiano. Assim, esse conjunto permite gerar campos magnéticos em qualquer direção e uma região ao redor de seu centro em que o campo magnético se distribui de maneira uniforme (BATISTA *et al.*, 2018). A Figura 1 mostra uma bobina de Helmholtz de três eixos projetada em CAD.

Na área espacial essas bobinas servem para calibrar sensores magnéticos, simular a movimentação de satélites em relação ao campo magnético terrestre (CARRARA, 2010), desmagnetizar pequenas peças de materiais ferromagnéticos utilizados na ciência de naves espaciais e anular o campo geomagnético num determinado volume (ROBERT, 2003).

Para demonstrar a utilidade em possíveis aplicações, no presente artigo é simulada a geração de campo magnético de uma bobina de Helmholtz e verifica-se como se distribui no espaço dentro dessa bobina o campo magnético gerado por ela.



**Figura 1.** Representação da gaiola de Helmholtz (adaptado de GERMANOVIX (2014)).

Na literatura que trata da bobina de Helmholtz e seu comportamento em geral discute-se que o campo magnético medido quando se aplica determinada corrente elétrica nos enrolamentos das bobinas difere do campo magnético que deveria ter sido produzido ao aplicar essa corrente. Essa discrepância é causada por distúrbios magnéticos, como os causados por materiais ferromagnéticos, equipamentos eletrônicos presentes no ambiente e o próprio campo magnético da Terra (LIU *et al.*, 2017). Surge então a necessidade de projetar um sistema de controle que compense essas componentes de campo magnético externo de maneira que o campo magnético gerado seja próximo do que foi requisitado. Na literatura há algumas propostas de controle para as bobinas, em OLIVEIRA (2014) é apresentado um compensador PID digital, em JIANG *et al.* (2021) é proposto um controlador preditivo MPC com observador por modos deslizantes de estados e distúrbios e em BATISTA *et al.* (2018) é proposta uma sintonia do compensador PID pelo método de resposta em frequência MIGO (*M-constrained Integral Gain Optimization*).

Este artigo propõe a simulação de controladores PID e por realimentação de estados através de projeto por alocação de polos. A técnica analítica facilita a obtenção dos ganhos do controlador PID de maneira a atingir a resposta transitória desejada. Objetiva-se encontrar um controlador que garanta um transitório desejado, erro de regime nulo à entrada degrau e robustez a ruídos de alta frequência.

Com os controladores projetados, foram comparados os ganhos e as respostas ao degrau alcançados com o que foi apresentado em BATISTA (2016) e BATISTA *et al.* (2018) para verificar

a viabilidade desses controles. Na análise da resposta em frequência, foram verificados seus comportamentos em alta frequência por meio do diagrama de Bode.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

### 2.1. Características e modelagem do sistema

O modelo utilizado neste projeto tem como base o modelo utilizado em BATISTA (2016). Nele, a planta pode ser dividida em: os elementos que geram o campo magnético (as bobinas de Helmholtz); os elementos relacionados à medição desse campo (sensor magnético e um filtro passa-baixa); e os dispositivos que apenas fazem a equivalência entre corrente elétrica, tensão e campo magnético. A bobina de Helmholtz pode ser tratada como um circuito resistor-indutor e sua função de transferência é:

$$C(s) = \frac{R}{R+Ls} = \frac{1}{1+\tau_l s} \quad (1)$$

em que  $\tau_l = L/R$  é sua constante de tempo,  $R$  e  $L$  são a resistência e a indutância da bobina, respectivamente. A parte do sistema relacionada à medição do campo magnético pode ser tratada apenas como um circuito RC (resistor-capacitor) do filtro passa-baixa, de maneira que sua função de transferência é:

$$H(s) = \frac{2\pi f_c}{2\pi f_c + s} = \frac{1}{1+\tau_c s} \quad (2)$$

em que  $\tau_c = 1/(2\pi f_c)$  é a constante de tempo do filtro RC e  $f_c$  é sua frequência de corte. Por fim, a partir das Equações (1) e (2), temos a função de transferência do sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(1+\tau_l s)(1+\tau_c s)} \quad (3)$$

É importante notar que  $G(s)$  é diferente para cada bobina de Helmholtz, pois a constante  $\tau_l$  em  $C(s)$  tem magnitude diferente para cada uma.

As bobinas de Helmholtz escolhidas são quadradas, porque são mais fáceis de projetar e fornecem um campo magnético mais uniforme comparadas às circulares (DAVIS; SPENCER, 1999). A geometria das quadradas também permite um melhor aproveitamento do volume e facilidade de implementação (RESTREPO *et al.*, 2014). Os parâmetros teóricos das bobinas utilizados nas simulações são apresentados na Tabela 1.

**Tabela 1.** Parâmetros teóricos das bobinas de Helmholtz (BATISTA, 2016).

	Bobina de Helmholtz Interna	Bobina de Helmholtz Central	Bobina de Helmholtz Externa
$L$ (cm)	88	94	100
$N$	124	132	140

$I$ (A)	1,76	1,76	1,76
$\tau_l$ (H/Ω)	773	627	550

O parâmetro  $L$  é o tamanho de cada bobina,  $N$  é o seu número de espiras e  $I$  é a corrente elétrica em seus enrolamentos. Esses três parâmetros serão os utilizados nas simulações do campo magnético uniforme para exemplificar a utilidade da bobina de Helmholtz.

## 2.2. Simulação do campo magnético uniforme

Em CARRARA (2010), GRASSI e PASTENA (2002) e OLIVEIRA (2014) são apresentados modelos matemáticos, baseados na lei de Biot-Savart, que determinam o campo magnético em qualquer ponto no interior de uma bobina de Helmholtz. As equações utilizadas neste artigo são obtidas de GRASSI e PASTENA (2002), manipuladas e apresentadas a seguir, considerando apenas a bobina de Helmholtz central. O campo magnético total gerado por ela - uma soma vetorial das componentes em  $x$ ,  $y$  e  $z$  - é calculado numericamente a partir dessas equações mediante o software Octave para os planos  $xy$  ( $z = 0$ ) e  $yz$  ( $x = 0$ ) de maneira a obter gráficos tridimensionais.

No cômputo do campo total no plano  $xy$  a única componente diferente de zero é  $B_z$ :

$$B_z = \frac{\mu NI}{4\pi} \left[ \begin{aligned} & \frac{(l-x)(l-y)}{\sqrt{(l-x)^2+(l-y)^2+(\sigma l)^2}} \left( \frac{1}{(l-x)^2+(\sigma l)^2} + \frac{1}{(l-y)^2+(\sigma l)^2} \right) + \\ & \frac{(l+x)(l-y)}{\sqrt{(l+x)^2+(l-y)^2+(\sigma l)^2}} \left( \frac{1}{(l+x)^2+(\sigma l)^2} + \frac{1}{(l-y)^2+(\sigma l)^2} \right) + \\ & \frac{(l-x)(l+y)}{\sqrt{(l-x)^2+(l+y)^2+(\sigma l)^2}} \left( \frac{1}{(l-x)^2+(\sigma l)^2} + \frac{1}{(l+y)^2+(\sigma l)^2} \right) + \\ & \frac{(l+x)(l+y)}{\sqrt{(l+x)^2+(l+y)^2+(\sigma l)^2}} \left( \frac{1}{(l+x)^2+(\sigma l)^2} + \frac{1}{(l+y)^2+(\sigma l)^2} \right) \end{aligned} \right] \quad (4)$$

em que  $l = L/2$ ,  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-3} (G \cdot m/A)$  é a permeabilidade magnética e  $\sigma = 0,544506$ , que é o parâmetro de maximização da uniformidade do campo magnético e está diretamente relacionado à distância ideal entre o par de bobinas. A demonstração da obtenção desse parâmetro para a distância ideal é apresentado em BATISTA *et al.* (2018).

No plano  $yz$  a única componente igual a zero é  $B_x$ . Então, as componentes a serem calculadas são:

$$B_y = \frac{\mu NI}{4\pi} \left[ \begin{aligned} & \frac{l(z+\sigma l)}{((l-y)^2+(z+\sigma l)^2)\sqrt{l^2+(l-y)^2+(z+\sigma l)^2}} - \frac{l(z+\sigma l)}{((l+y)^2+(z+\sigma l)^2)\sqrt{l^2+(l+y)^2+(z+\sigma l)^2}} \\ & + \frac{l(z-\sigma l)}{((l-y)^2+(z-\sigma l)^2)\sqrt{l^2+(l-y)^2+(z-\sigma l)^2}} - \frac{l(z-\sigma l)}{((l+y)^2+(z-\sigma l)^2)\sqrt{l^2+(l+y)^2+(z-\sigma l)^2}} \end{aligned} \right] \quad (5)$$

$$B_z = \frac{\mu NI}{4\pi} \left[ \begin{aligned} & \frac{l(l-y)}{\sqrt{l^2+(l-y)^2+(z+\sigma l)^2}} \left( \frac{1}{l^2+(z+\sigma l)^2} + \frac{1}{(l-y)^2+(z+\sigma l)^2} \right) + \\ & \frac{l(l+y)}{\sqrt{l^2+(l+y)^2+(z+\sigma l)^2}} \left( \frac{1}{l^2+(z+\sigma l)^2} + \frac{1}{(l+y)^2+(z+\sigma l)^2} \right) + \\ & \frac{l(l+y)}{\sqrt{l^2+(l+y)^2+(z-\sigma l)^2}} \left( \frac{1}{l^2+(z-\sigma l)^2} + \frac{1}{(l+y)^2+(z-\sigma l)^2} \right) + \\ & \frac{l(l-y)}{\sqrt{l^2+(l-y)^2+(z-\sigma l)^2}} \left( \frac{1}{l^2+(z-\sigma l)^2} + \frac{1}{(l-y)^2+(z-\sigma l)^2} \right) \end{aligned} \right] \quad (6)$$

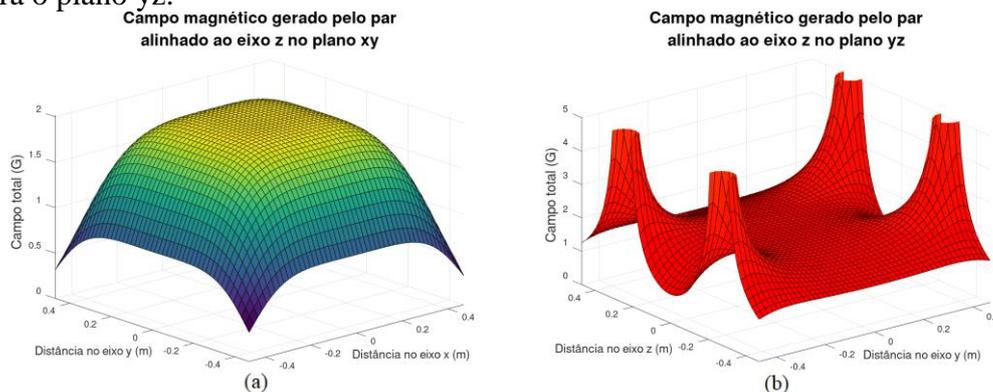
Finalmente, o campo total no plano  $yz$  é, a partir das Equações (5) e (6),

$$B = \sqrt{B_y^2 + B_z^2} \quad (7)$$

Os campos totais produzidos pela bobina de Helmholtz para ambos os casos são apresentados nas Figuras 2(a) e 2(b).

Na Figura 2(a) obteve-se o campo magnético para um plano com mesmas dimensões da bobina de Helmholtz central (94 cm) variando  $x$  e  $y$ . Pode ser vista claramente a região de uniformidade e como o campo decresce conforme se afasta do centro da bobina.

Já na Figura 2(b) obteve-se o campo magnético para um plano com dimensões iguais à situação anterior, mas variando  $y$  e  $z$ . Percebe-se, além da região de uniformidade próxima a sua região central, que o campo aumenta em quatro regiões, que seriam as proximidades dos lados das bobinas, devido à proporção inversa entre o campo gerado num ponto e a distância entre esse ponto e o condutor. O gráfico do campo magnético no plano  $xz$  não foi apresentado porque é idêntico ao gráfico para o plano  $yz$ .



**Figura 2. (a)** Campo total produzido pela bobina de Helmholtz central no plano  $xy$  com  $z = 0$ . **(b)** Campo total produzido pela bobina de Helmholtz central no plano  $yz$  com  $x = 0$ .

Os resultados mostram a capacidade teórica da bobina de Helmholtz gerar campo magnético uniforme numa região ao redor do seu centro, suficiente para calibrar sensores magnéticos. Além disso, o campo magnético de aproximadamente 2 G obtido no centro da bobina com os parâmetros utilizados seria suficiente para, por exemplo, anular o campo geomagnético em simulações para missões espaciais.

## 2.3. Projeto de controladores para o sistema

### 2.3.1. Compensador PID por alocação de polos

O compensador PID foi projetado para a bobina de Helmholtz porque além de cumprir o essencial - zerar o erro de regime permanente do campo magnético - também satisfaz seus critérios de desempenho, como menos oscilações no transitório e resposta mais rápida. Com as ações de controle proporcional (P), integral (I) e derivativa (D) é possível alocar os polos, as raízes da equação característica da função de transferência final, em qualquer posição no plano complexo  $s$ . Alocar os polos para o semiplano esquerdo do plano  $s$  é uma condição necessária e suficiente para tornar o sistema estável.

O sinal de controle  $u(t)$  para o controle PID é descrito como



ISSN 2447-5378

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (8)$$

em que  $e(t) = r(t) - y(t)$  é o erro atuante que realimenta o sistema,  $r(t)$  é o sinal de referência,  $y(t)$  é o sinal de saída e  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  são os ganhos proporcional, integral e derivativo, respectivamente. Por meio da transformada de Laplace na Equação (8) obtemos a função de transferência para o controle PID:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (9)$$

Os ganhos são calculados a partir de especificações do projeto de controle, como máximo sobressinal, tempo de pico e tempo de acomodação.

Contudo, o controle derivativo puro não é implementado na prática porque, como ele é tratado como um filtro passa-alta, fica suscetível a ruídos de alta frequência (JOHNSON *et al.*, 2005). Isso significa que os ruídos são amplificados, o que poderia tornar a resposta a uma determinada entrada na teoria diferente da resposta à mesma entrada na prática. Na utilização das bobinas de Helmholtz, esses ruídos podem se manifestar como as interferências causadas por materiais ferromagnéticos e dispositivos eletrônicos. Para prevenir esse problema, é utilizado um filtro passa-baixa no termo derivativo, de maneira que a Equação (9) é reescrita como:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + T_1 s} \quad (10)$$

em que  $T_1$  é o inverso da frequência de corte desse filtro.

Para garantir a estabilidade absoluta, todos os polos do sistema em malha fechada precisam estar no semiplano esquerdo do plano complexo  $s$ . Isso possibilita impor que os critérios de desempenho sejam satisfeitos, já que os polos do plano  $s$  estão relacionados ao coeficiente de amortecimento e à frequência natural não amortecida da planta representada na Equação (3). A planta é um sistema de segunda ordem cujo denominador igualado a zero é sua equação característica, que pode ser descrita também pela equação padrão de sistemas de segunda ordem:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + \left(\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_c}\right)s + \frac{1}{\tau_l\tau_c} = 0 \quad (11)$$

em que  $\zeta$  e  $\omega_n$ , características dessa planta, são o coeficiente de amortecimento e a frequência natural não amortecida, respectivamente.

Quando utilizamos o controle PID com alocação de polos, modificamos essa planta para um sistema de malha fechada de terceira ordem com três polos alocados pelas ações de controle mencionadas anteriormente. Como os novos valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$  dependem das especificações de projeto - máximo sobressinal, tempo de pico e tempo de acomodação (parâmetros escolhidos pelo projetista) - podemos alocar os polos para quaisquer pontos no plano  $s$  como for requisitado. Assim, impondo que os critérios de desempenho sejam satisfeitos pela alocação de polos, é possível obter o comportamento desejado tanto para o transitório quanto para o regime permanente.

Da Equação (3) obtém-se a função de transferência para cada bobina de Helmholtz com o filtro passa-baixa (planta). Em conjunto da Equação (9) obtém-se a função de transferência final do sistema controlado em malha fechada:



$$G_F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)G_c(s)}{1+G(s)G_c(s)} \quad (12)$$

em que obtemos a resposta ao degrau. No projeto do compensador PID por alocação de polos compara-se o denominador do lado direito da Equação (12) com o polinômio cujas raízes são os polos do sistema em malha fechada. Assim,

$$1 + G(s)G_c(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = 0 \quad (13)$$

em que  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são os polos em malha fechada. Os polos  $p_1$  e  $p_2$  são os dois polos complexos conjugados alocados e calculados por  $p_1 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$  e  $p_2 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ . Já  $p_3$  é o terceiro polo alocado e deve ser múltiplo  $\alpha$  da parte real de  $p_1$  ou  $p_2$ , ou seja,  $p_3 = -\alpha\zeta\omega_n$ . O coeficiente  $\alpha = 5$  no mínimo para que os polos complexos conjugados, mais próximos do eixo imaginário, sejam dominantes no desempenho da resposta transitória (OGATA, 2010). Substituindo as Equações (3) e (9) na Equação (13) obtêm-se os ganhos  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ .

Com os ganhos calculados, é projetado o sistema em malha fechada com compensador PID com filtro no termo derivativo pela Equação (10) a fim de obter um resultado mais semelhante ao real (considerando ruídos de alta frequência).

### 2.3.2. Controle por realimentação de estados por alocação de polos

Para esse tipo de compensação, utilizamos o sinal de controle  $u(t)$  como uma função das variáveis de estado. Como a planta (bobina e outros elementos) não possui integrador, necessário para anular o erro de regime permanente do campo, ele foi utilizado neste projeto de controle. O modelo do sistema a ser controlado pode ser representado no espaço de estados aplicando a transformada de Laplace inversa na Equação (3):

$$\dot{y}(t) + \left(\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_c}\right)\dot{y}(t) + \frac{1}{\tau_l\tau_c}y(t) = \frac{1}{\tau_l\tau_c}u(t) \quad (14)$$

Fazendo  $x_1(t) = y(t)$  e  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ , definimos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau_l\tau_c} & -\left(\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau_l\tau_c} \end{bmatrix} u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (15)$$

em que  $\mathbf{x}$  é a matriz das variáveis de estado,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são as matrizes de estado e de entrada, respectivamente.

Para alocar os polos para quaisquer pontos no plano  $s$  com a realimentação de estados é necessário e suficiente que o sistema seja de estado completamente controlável (OGATA, 2010). Para isso definimos a matriz de controlabilidade:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tau_l\tau_c} \\ \frac{1}{\tau_l\tau_c} & -\left(\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_c}\right)\frac{1}{\tau_l\tau_c} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Se o posto da matriz  $\mathbf{M}$  for maior ou igual à dimensão da matriz de estado, a condição de controlabilidade é satisfeita. Isso se confirma, pois  $\mathbf{M}$  escalonada possui posto igual a 2.

No projeto de controle por realimentação de estados com integrador, define-se o conjunto de equações:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + k_I \xi(t) \quad (17)$$

$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t) \quad (18)$$

em que  $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$  é a matriz de ganho de realimentação de estados,  $k_I$  é o ganho do integrador e  $\xi(t)$  é a saída do integrador. Após implementar o compensador, teremos as variáveis de estado  $x_1(t) = y(t)$ , que seria o campo magnético gerado;  $x_2(t) = \dot{y}(t)$  a taxa de variação do campo magnético gerado, e  $x_3(t) = \xi(t)$  a integral do erro atuante que realimenta o sistema. As duas últimas variáveis não são analisadas já que estamos interessados apenas na saída do sistema. É importante notar que ao fazermos uso do controle por realimentação de estados por alocação de polos, assumimos que todas as variáveis de estado são mensuráveis e realimentáveis.

A equação no espaço de estados para o sistema controlado em malha fechada é obtida primeiramente a partir da combinação das Equações (15) e (18) e lembrando que  $x_1(t) = y(t)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\tau_l \tau_c} & -\left(\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_c}\right) & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau_l \tau_c} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (19)$$

e, por fim, substituindo a Equação (17) na Equação (19):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{1}{\tau_l \tau_c} + \frac{k_1}{\tau_l \tau_c}\right) & -\left(\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_c} + \frac{k_2}{\tau_l \tau_c}\right) & \frac{k_I}{\tau_l \tau_c} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (20)$$

pela qual podemos obter a resposta ao degrau. Calculamos os polos do mesmo modo como para o PID, enquanto que os ganhos  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_I$  a partir dos autovalores da matriz que multiplica a matriz das variáveis de estado na Equação (20):

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{1}{\tau_l \tau_c} + \frac{k_1}{\tau_l \tau_c}\right) & -\left(\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_c} + \frac{k_2}{\tau_l \tau_c}\right) & \frac{k_I}{\tau_l \tau_c} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (21)$$

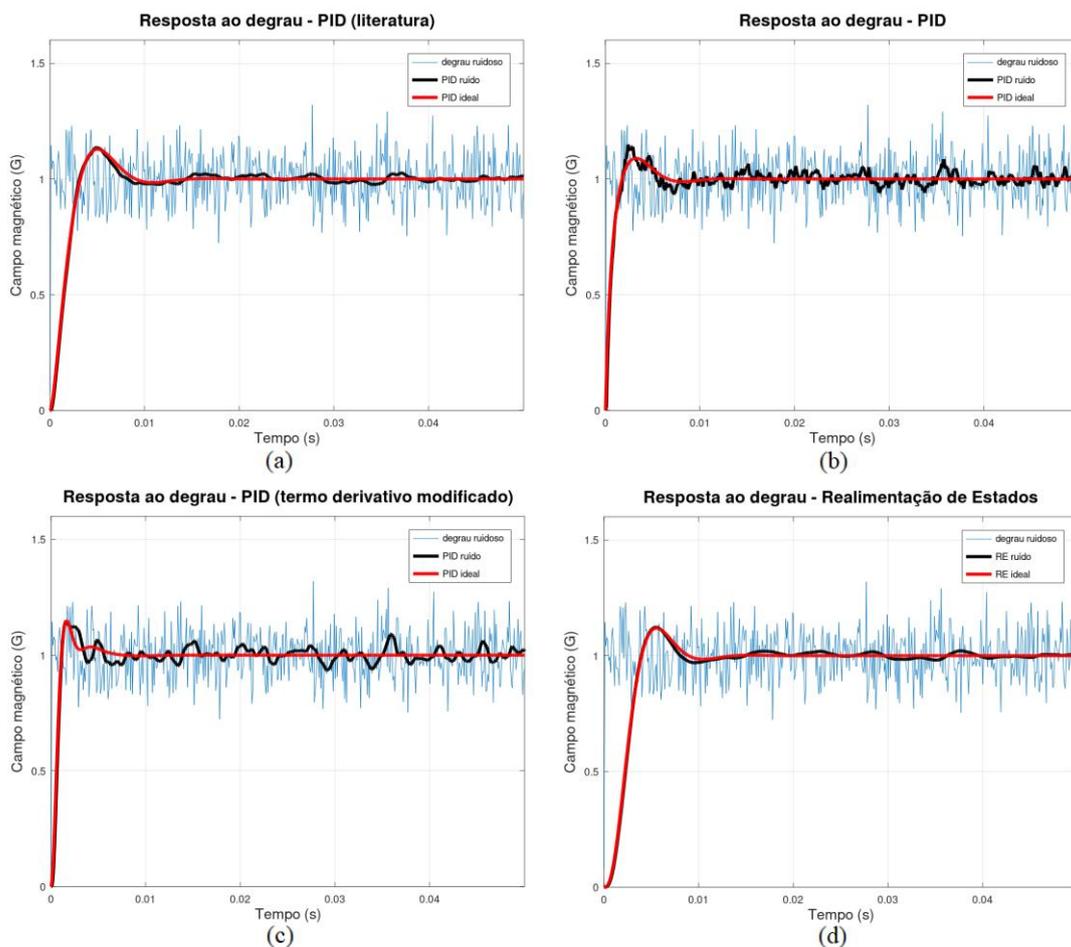
e comparando a equação obtida com a equação dos polos  $(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = 0$ .

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O objetivo do controle foi compensar as possíveis interferências magnéticas e que o campo magnético em regime permanente (campo requisitado) seja de 1 G. A resposta ao degrau e as respostas em frequência ficaram semelhantes para as três bobinas de Helmholtz. Então, foi considerada a simulação dos controladores para apenas uma delas (no caso, a bobina central) neste artigo a fim de permitir uma visualização e análise mais objetivas dos resultados.

A resposta ao degrau com PID da literatura era de um modelo discreto e foi convertido para um modelo contínuo para haver uma comparação mais condizente com os resultados dos compensadores projetados neste trabalho. A conversão do discreto para o contínuo foi feita pelo método de Tustin com um tempo de amostragem de  $0,0005\text{ s}$  e o resultado pode ser visto na Figura 4(a). O máximo sobressinal e o tempo de pico alcançados foram de  $12,974\%$  e  $0,0049558\text{ s}$ , respectivamente. Neste gráfico há duas respostas ao degrau: PID ideal, considerando que as componentes de campo magnético das interferências a serem compensadas podem ser tratadas como erros de offset; e PID ruído, que é resposta ao degrau ruidoso aleatório, ou seja, considerando interferências magnéticas que variam aleatoriamente.

Para haver uma comparação mais adequada entre a resposta do sistema com controle da literatura e as respostas do sistema com os controles propostos, estas foram simuladas considerando os mesmos valores de máximo sobressinal e tempo de pico para determinar a localização desejada dos polos de malha fechada. A resposta ao degrau utilizando compensador PID sem e com filtro no termo derivativo e o controle por realimentação de estados (RE) são apresentadas, respectivamente, nas Figuras 4(b), 4(c) e 4(d). As simulações foram feitas para  $\alpha = 5$  e  $T_1 = 0,0005\text{ s}$ .



**Figura 4.** (a) Resposta ao degrau e ao degrau ruidoso aleatório do campo magnético para a bobina de Helmholtz central utilizando o compensador PID (literatura). (b) Mesmas respostas do campo magnético para a mesma bobina utilizando o compensador PID. (c) Mesmas respostas do campo magnético para a mesma bobina utilizando o compensador PID com filtro. (d) Mesmas respostas do campo magnético para a mesma bobina utilizando controle por realimentação de estados.

Os resultados alcançados para o valor de regime permanente  $y_{ss}$ , máximo sobressinal  $M_p$  e tempo de pico  $t_p$  com os três controladores projetados são exibidos na Tabela 2. Os valores de máximo sobressinal e tempo de pico diferentes do especificado ocorrem devido ao terceiro polo alocado, que modifica a resposta transitória. Contudo, o desempenho foi satisfatório com todos os controladores. Os valores de regime permanente ficaram muito próximos de 1  $G$  como requisitado.

**Tabela 2.** Especificações de desempenho alcançadas.

	PID	PID (modificado)	RE
$y_{ss} (G)$	1,0004	0,99969	1,0001
$M_p$	8,8708 %	15,03 %	11,904 %
$t_p (s)$	0,0033846	0,0016	0,0055385

Para o máximo sobressinal e tempo de pico levados em consideração, o sistema com controle PID forneceu um transitório mais amortecido e uma resposta mais rápida, o que é desejável, comparado ao sistema com controle integral por realimentação de estados. Já o controle PID com filtro proporcionou um transitório menos amortecido e uma resposta ainda mais rápida que o PID. Esses critérios podem ser modificados arbitrariamente pelo projetista. Porém, para obter resultados e desempenhos melhores é necessária maior energia dos compensadores, que pode ser notado por maiores valores dos ganhos.

Os ganhos obtidos para os compensadores projetados foram maiores que os obtidos da literatura. Isso se deu porque foi exigido maior esforço - pela alocação de polos - dos controladores projetados, levando a desempenhos mais satisfatórios, sobretudo para o compensador PID, como pode ser visto nas respostas obtidas. Teoricamente é possível obter desempenhos tão bons quanto forem desejados, mas que podem fazer o compensador depender esforços talvez impraticáveis. As magnitudes dos ganhos são apresentadas na Tabela 3.

**Tabela 3.** Ganhos dos compensadores.

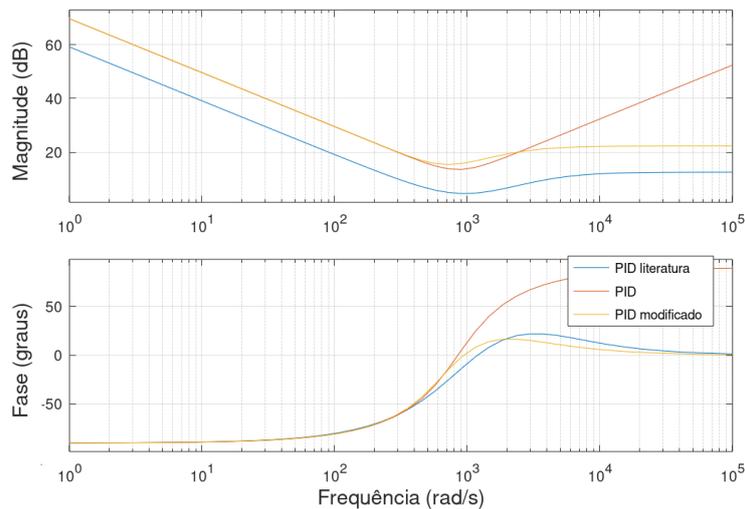
PID	PID (literatura)	RE
$K_p = 4,7922$	$K_p = 1,54056$	$k_1 = 5,78905$
$K_i = 3005,8$	$K_i = 901,75$	$k_I = 3005,8$
$K_d = 0,004166$	$K_d = 0,0006846$	$k_2 = -0,99264$

Quanto à resposta ao degrau com ruído, o controle por realimentação de estados apresenta um desempenho mais semelhante ao da literatura e permite maior compensação dos ruídos. Além disso, o compensador PID com filtro no termo derivativo discriminou ruídos de alta frequência, em contraste ao compensador PID, como esperado.

Outra abordagem foi a análise no domínio da frequência pelo diagrama de Bode. Foram obtidos os diagramas de Bode utilizando a função de transferência de cada compensador PID. Os resultados podem ser vistos na Figura 5. O compensador PID (literatura) atenua as componentes de ruído de altas frequências. Já o compensador PID projetado oferece o resultado oposto, e os ruídos

são amplificados cada vez mais conforme a frequência tende ao infinito. Com o filtro no termo derivativo, sua amplitude deixa de aumentar em altas frequências, o que é desejado para garantir que a resposta em regime permanente estabilize. Percebe-se também que o ruído deixa de defasar em altas frequências para os compensadores PID da literatura e PID projetado com filtro.

Diagrama de Bode

**Figura 5.** Diagramas de Bode para os compensadores PID.

O sistema com qualquer um dos compensadores PID apresentou estabilidade relativa aceitável. O sistema com compensador PID teve margem de fase de  $85,891^\circ$  enquanto que com PID da literatura e com PID de termo derivativo modificado teve margens de fase iguais a  $57,899^\circ$  e  $55,564^\circ$ , respectivamente. Além disso, todos apresentaram margens de ganho tendendo a infinito, o que indica a necessidade de ganhos infinitos para tornar o sistema instável.

Nota-se, a partir dos diagramas de Bode e dos resultados obtidos, a importância de adicionar o polo no termo derivativo do compensador PID projetado para este sistema. Além de proporcionar mais robustez em altas frequências, o PID modificado é implementável na prática, seus diagramas de Bode apresentam curvas mais semelhantes àsquelas do PID da literatura e as margens de fase também são mais próximas.

#### 4. CONCLUSÃO

O objetivo neste artigo foi estudar as características da gaiola de Helmholtz e verificar o campo magnético gerado de modo uniforme numa região ao redor do centro das bobinas visando possíveis aplicações espaciais. Foram projetados e simulados os controladores pela técnica da alocação de polos para melhorar o desempenho na geração de campo magnético das bobinas de Helmholtz. Os resultados obtidos, diagramas de Bode e as respostas ao degrau se mostraram satisfatórios e condizentes, tendo em vista o que foi exposto na literatura. Além disso, podem servir de base para trabalhos futuros, nos quais se pretende melhorar o desempenho das bobinas analisando a energia consumida e verificando possíveis alterações para otimizar o desempenho do sistema controlado.

#### 5. REFERÊNCIAS



ISSN 2447-5378

Congress of Industrial  
Management and Aeronautical  
Technology

Fatec  
São José dos  
Campos  
Prof. Jessen Vidal

CPS  
Centro  
Paula Souza

SÃO PAULO  
GOVERNO DO ESTADO

BATISTA, D. S. *Plataforma de Simulação HiL Contendo uma Bobina de Helmholtz e Aplicada a Sistemas Aeroespaciais*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

BATISTA, D. S.; CARVALHO, M.; FLÁVIO, L.; GRANZIERA, F. *Three-Axial Helmholtz Coil Design and Validation for Aerospace Applications*. IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems, 2018, v. 54, n. 1, p. 392–403.

CARRARA, V. *Projeto de Bobinas de Helmholtz em 3 Eixos para Simulação de Campo Magnético*. VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2010.

DAVIS, R.; SPENCER, J. *Helmholtz Coils for MIL-STD-462D RS101 Testing*. IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility. Symposium Record (Cat. No. 99CH36261), 1999, v. 2, p. 940–942.

GERMANOVIX, G. *Projeto e Construção de uma Bobina de Helmholtz de Três Eixos Aplicada à Calibração de Magnetômetros*. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

GRASSI, M.; PASTENA, M. *Optimum Design of a Three-Axis Magnetic Field Simulator*. IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems, 2002, v. 38, n. 2, p. 488–501.

JIANG, J.; YANG, L.; ZHANG, L. *Closed-Loop Control of a Helmholtz Coil System for Accurate Actuation of Magnetic Microrobot Swarms*. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, v. 6, n. 2, p. 827–834.

JOHNSON, M. A.; MORADI, M. *et al. PID control: New Identification and Design Methods*. Springer, 2005.

LIU, Z.; ZHANG, Q.; PAN, M. *et al. Distortion Magnetic Field Compensation of Geomagnetic Vector Measurement System Using a 3-D Helmholtz Coil*. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2017, v. 14, n. 1, p. 48–51.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson, 2010.

OLIVEIRA, D. *Calibração e Controle de Bobinas de Helmholtz para Aplicação Espacial*. Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2014.

RESTREPO, A. F.; FRANCO, E.; PINEDO, C. R. *A Design and Implementation Methodology of a System to Generate Uniform Magnetic Field Volume with Tri-Axial Square Helmholtz Coils*. Información tecnológica, 2014, v. 25, n. 2, p. 3–14.

ROBERT, R. *Bobina de Helmholtz*. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2003, v. 25, n. 1, p. 40–44.