



# APLICATIVO COMPUTACIONAL PARA CÁLCULO DE CONSTANTES ELÁSTICAS DE COMPÓSITOS MULTIDIRECIONAIS.

J.F. Reis<sup>1,\*</sup>; L.C. Pardini<sup>2</sup>

1 Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos - Professor Jessen Vidal  
Av. Cesare Mansueto Giulio Lattes, 1350 - Eugênio de Melo, São José dos Campos/SP,  
CEP.: 12247-014, Brasil.  
Telefone: (12) 3905-2423

2 Divisão de Materiais – Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial  
Avenida Brigadeiro Faria Lima, 1941 – São José dos Campos/SP, CEP.: 12227-000, Brasil.  
Telefone: (12) 3947-3000

\*[jonas.reis@outlook.com](mailto:jonas.reis@outlook.com)

**RESUMO:** Compósitos com fibras longas são anisotrópicos. Assim, para uma caracterização das propriedades, é necessário a determinação de constantes elásticas em função do eixo de aplicação de carregamento em relação ao eixo principal das fibras. Tradicionalmente, a determinação de constantes elásticas pode ser efetuada experimentalmente, por meio de ensaios mecânicos, ou por meio analítico, utilizando aplicativos computacionais dedicados, utilizando as teorias de micromecânica e teoria clássica de lâminas, oriundas da mecânica dos sólidos. Através de aplicativos computacionais, é possível o cálculo de constantes elásticas para essas novas estruturas que são utilizadas na indústria aeronáutica e aeroespacial. A presente proposta de trabalho tem por objetivo implementar um aplicativo computacional de baixo custo, baseado na teoria de micromecânica de compósitos, que contemple a estimativa das constantes elásticas, utilizando das características intrínsecas do reforço e da matriz componentes do compósito. Existem aplicativos computacionais complexos para essa finalidade baseadas em elementos finitos de custo proibitivo.

**PALAVRAS-CHAVE:** compósitos; constantes elásticas; aplicativos computacionais.

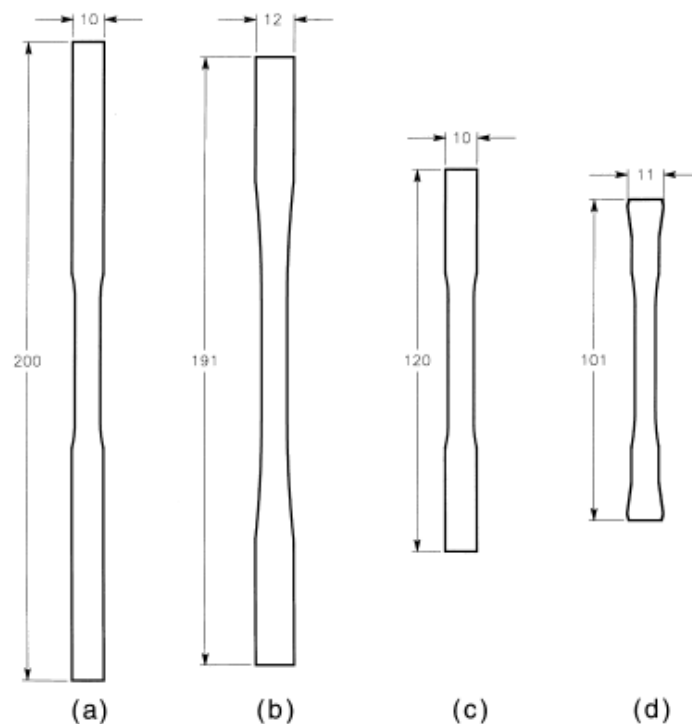
**ABSTRACT:** Composites with long fibers are anisotropic. In these cases, it is necessary to determine the elastic constants as a function of the axis of loading application with respect to the main axis of the fibers. Generally, the determination of the elastics constants can be done experimentally, by mechanical tests, or by analytical means, using dedicated computer applications, using the theories of micromechanics and Classical Laminate Theory (CLT), originated from the solid mechanics. Through computer applications, is possible to calculate the elastic constants for these new structures that are used in the aeronautic and aerospace industries. The objective of this work proposal is to implement a low-cost computer application, based on the micromechanical theory of structural composites, that considers the estimation of elastic constants, using the intrinsic characteristics of the reinforcement and matrix composite components. There are complex computer applications for this purpose based on finite elements that have prohibitive costs.

**KEYWORDS:** composites; elastics constants; computer applications.

## 1. INTRODUÇÃO.

Os materiais são caracterizados por suas propriedades mecânicas, e consequentemente suas constantes elásticas. Usualmente, as propriedades mecânicas características de materiais são a resistência à tração, a resistência à compressão e a resistência ao cisalhamento. A rigidez é caracterizada pelo módulo elástico em tração ou cisalhamento. No caso de materiais isotrópicos, as constantes elásticas, e particularmente o módulo elástico, é caracterizado unicamente por um valor, independentemente da direção de medida. No caso de compósitos a situação é mais complexa, uma vez que as constantes elásticas vão depender da orientação das fibras de reforço (DANIEL,2006 ; MOHITE, 2012).

Uma situação particular dos compósitos, refere-se aos compósitos de matriz de carbono e compósitos de matriz cerâmica. Para esses materiais a situação de ensaio é mais delicada, independente do tipo de teste utilizado, uma vez que esses materiais são inerentemente frágeis. Particularmente, o ensaio de tração é mais crítico pois exige corpos de prova mais elaborados cujo suporte para fixação no equipamento de ensaio deve ser projetado para não danificar o mesmo. Assim, com o desenvolvimento da tecnologia de compósitos foram sendo avaliadas as opções de geometria de corpos de prova e modos de ensaio, particularmente em esforços de tração, que possibilitassem reduzir a possibilidade prematura de dano ao mesmo, conforme mostra a Figura 1 (LARA-CURZIO, 1999).



**Figura 1.** Geometrias de corpos de prova para ensaio de tração, baseados na norma ASTM C1275. (a) - (c) este com fixação pela face ; (d) teste com fixação por engaste. Dimensões em mm. (LARA-CURZIO, 1999)

Durante o ensaio de tração de materiais , os resultados obtidos levam a obtenção de uma curva de tensão em função da deformação, conforme mostra o gráfico da Figura 2. Ocorre um crescimento monotônico da tensão em função da deformação até a ruptura. No limiar do início da

curva de tensão/deformação, a inclinação correspondente representa o módulo elástico do material, e relaciona-se à Lei de Hooke, conforme Equação 1.

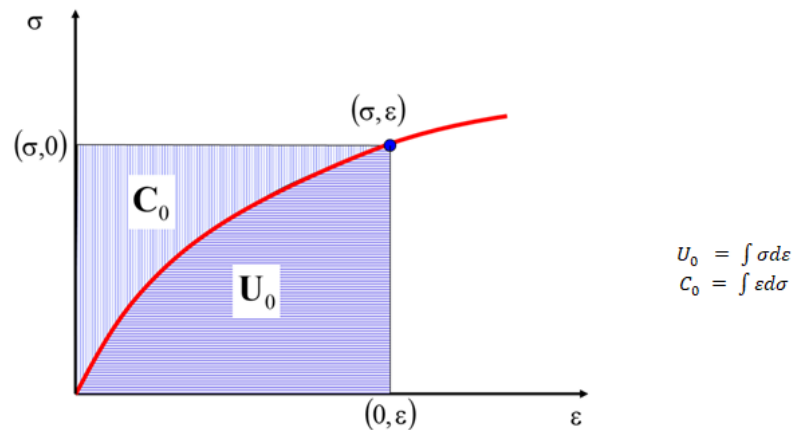
$$\sigma = E * \varepsilon \quad (1)$$

Onde:

$\sigma$  = Tensão

$E$  = Módulo elástico

$\varepsilon$  = deformação

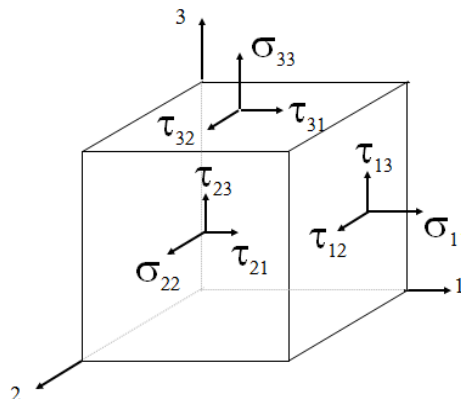


**Figura 2.** Modelo esquemático de uma curva tensão deformação.  $U_0$  = energia interna do material,  $C_0$  = complemento da energia interna.

## 2 ABORDAGEM E PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

Para que se compreenda o funcionamento do aplicativo e quais as etapas para a criação do mesmo, primeiramente serão necessárias as conceituações de alguns conceitos de compósitos, que levam à determinação das constantes elásticas, que é o objetivo principal do trabalho, sendo estes conceitos mostrados a seguir:

Em mecânica dos sólidos, a representação de um elemento de volume de um material é mostrada na Figura 3 (DANIEL,2006 ; MOHITE, 2012). As tensões normais são perpendiculares às faces ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ ), e as tensões de cisalhamento( $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{21}, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{32}$ ), são paralelas às faces. O primeiro número (i em  $\tau_{ij}$  ou  $\sigma_{ij}$ ) indica o plano de aplicação, enquanto o segundo (j em  $\tau_{ij}$  ou  $\sigma_{ij}$ ) representa a direção.



**Figura 3.** Representação de um elemento infinitesimal de compósito mostrando as tensões em cada plano.

A partir da Equação  $\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$ , podemos obter a matriz de flexibilidade (resiliência), dada pela Equação 2:

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\}, \text{ onde } S = C^{-1} \quad (2)$$

Onde:

$\varepsilon$  = Deformação

S = Matriz de flexibilidade

$\sigma$  = Tensão

C = Matriz de rigidez

Representando a matriz de flexibilidade em sua forma simplificada teremos a Equação 3:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Onde:

$S_{ij}$  = Constantes de flexibilidade

$\varepsilon_i$  = Componentes de deformação

$\sigma_i$  = Componentes de tensão

Na forma de constantes elásticas, pode-se representar a matriz de flexibilidade de acordo com a Equação 4.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\nu_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_{22} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_{33} & -\nu_{32}/E_{33} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Onde:

$\varepsilon_i$  = Componentes de deformação

$\sigma_i$  = Componentes de tensão

$E_{ij}$  = Módulos de elasticidade em cada direção

$\nu_{ij}$  = Razão de Poisson em cada direção

$G_{ij}$  = Módulos de cisalhamento em cada direção

Para um material ortotrópico, a representação da matriz de rigidez referente à Figura 2 é mostrada pela relação  $\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$ , sendo mostrado pela matriz representada na Equação 5.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Onde:

$C_{ij}$  = Constantes de rigidez

$\varepsilon_i$  = Componentes de deformação

$\sigma_i$  = Componentes de tensão

Para calcular as constantes de rigidez ( $C_{ij}$ ), pode-se enumerar as seguintes Equações e igualdades :

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_{22} E_{33} \Delta} \quad (6)$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{E_{22} E_{33} \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \nu_{13}}{E_{11} E_{33} \Delta} \quad (7)$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{E_{11} E_{22} \Delta} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_{22} E_{33} \Delta} \quad (8)$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_{11} E_{33} \Delta} \quad (9)$$

$$C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}}{E_{11} E_{33} \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}}{E_{11} E_{22} \Delta} \quad (10)$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_{11} E_{22} \Delta} \quad (11)$$

$$C_{44} = G_{23} \quad (12)$$

$$C_{55} = G_{13} \quad (13)$$

$$C_{66} = G_{12} \quad (14)$$

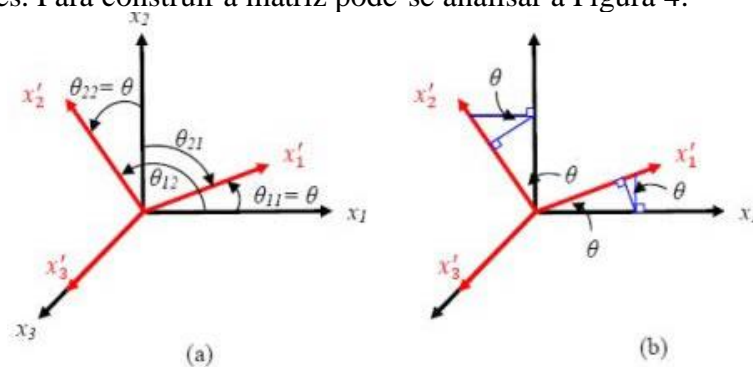
Onde:

$$\Delta = \frac{1}{E_{11}E_{22}E_{33}} \begin{vmatrix} 1 & -\nu_{21} & -\nu_{31} \\ -\nu_{12} & 1 & -\nu_{32} \\ -\nu_{13} & -\nu_{23} & 1 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$E_{ij}$  = Módulos de elasticidade em cada direção  
 $\nu_{ij}$  = Razão de Poisson em cada direção

## 2.1. Conceituação de cossenos diretores e célula unitária

Para definir as orientações multidirecionais do compósito é desejável utilizar da representação de cossenos diretores. Para construir a matriz pode-se analisar a Figura 4:



**Figura 4.** Transformação no eixo  $x_3$ . (a) Ângulo  $\theta_{ij}$  entre o eixo local e global.  
(b) Representação dos ângulos como  $\theta$ , já que neste caso:  $\theta_{11} = \theta_{22} = \theta$ .

Frequentemente é necessário transformar uma quantificação tensorial de um sistema de coordenadas para outro (PASTORE, 1994). Essa transformação de um tensor é feita utilizando os cossenos diretores do ângulo obtido entre o sistema de coordenadas inicial e o sistema final. Serão nomeados os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  como as coordenadas iniciais e  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  como as coordenadas finais. A partir disso, é possível encontrar os cossenos diretores ( $a_{ij}$ ) para essa relação de transformação. Será utilizada a convenção de que o  $i$  de  $a_{ij}$  corresponde aos eixos iniciais e o  $j$  aos finais. A correspondência entre os cossenos diretores e essa convenção é mostrada na Tabela 1:

**Tabela 1.** Cossenos diretores para um plano 3D, onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são os eixos globais e  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  os locais.

De/para	$x1'$	$x2'$	$x3'$
$x1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$x2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$x3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

Onde:

$a_{11}$ ,  $a_{12}$  e  $a_{13}$  podem ser escritos como  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$ , respectivamente  
 $a_{21}$ ,  $a_{22}$  e  $a_{23}$  podem ser escritos como  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , respectivamente  
 $a_{31}$ ,  $a_{32}$  e  $a_{33}$  podem ser escritos como  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ , respectivamente

### 2.1.1. Transformação de tensão e deformação

Tensão e deformação são tensores de segunda ordem, por isso ambos seguem a mesma lei de transformação. Para transformar utilizando constantes de engenharia de deformação de cisalhamento, é necessário definir uma segunda matriz de transformação. Por isso definimos a matriz de transformação  $[T_1]$  para a transformação de tensão, e  $[T_2]$  para a transformação de deformação utilizando as constantes de engenharia de deformação de cisalhamento. A tensão nas coordenadas locais estão relacionadas com as coordenadas globais pela Equação 16:

$$\sigma_{local} = T_{\sigma} \sigma_{global} \quad (16)$$

Onde:

$\sigma_{local}$  = Tensão nas coordenadas locais  
 $T_{\sigma}$  = Matriz de transformação de tensões  
 $\sigma_{global}$  = Tensão nas coordenadas globais

O mesmo vale para a deformação:

$$\varepsilon_{local} = T_{\varepsilon} \varepsilon_{global} \quad (171)$$

Onde:

$\varepsilon_{local}$  = Deformação nas coordenadas locais  
 $T_{\varepsilon}$  = Matriz de transformação de deformações  
 $\varepsilon_{global}$  = Deformação nas coordenadas globais

Tomando como referência a Equação (16),

$$\varepsilon_{local} = T_{\varepsilon} \varepsilon_{global} \quad (171 \text{ e } )$$

$\varepsilon_{local} = C_{local} \sigma_{local}$   
 (18, podemos chegar na Equação )

$$T_{\sigma} \sigma_{global} = C_{local} T_{\varepsilon} \varepsilon_{global} \quad (192).$$

$$\varepsilon_{local} = C_{local} \sigma_{local} \quad (18)$$

Onde:

$\varepsilon_{local}$  = Deformação nas coordenadas locais  
 $C_{local}$  = Matriz de rigidez nas coordenadas locais  
 $\sigma_{local}$  = Tensão nas coordenadas locais

$$T_{\sigma} \sigma_{global} = C_{local} T_{\varepsilon} \varepsilon_{global} \quad (192)$$

Onde:

$T_{\sigma}$  = Matriz de transformação de tensões  
 $\sigma_{global}$  = Tensão nas coordenadas globais  
 $C_{local}$  = Matriz de rigidez nas coordenadas locais  
 $T_{\varepsilon}$  = Matriz de transformação de deformações  
 $\varepsilon_{global}$  = Deformação nas coordenadas globais

E,

$$\sigma_{global} = T_{\sigma}^{-1} C_{local} T_{\varepsilon} \varepsilon_{global} \quad (203)$$

Onde:

$T_{\sigma}^{-1}$  = Matriz inversa de transformação de tensões  
 $\sigma_{global}$  = Tensão nas coordenadas globais  
 $C_{local}$  = Matriz de rigidez nas coordenadas locais  
 $T_{\varepsilon}$  = Matriz de transformação de deformações  
 $\varepsilon_{global}$  = Deformação nas coordenadas globais

É possível observar que a transformação da matriz de elasticidade local para a matriz de elasticidade global pode ser representada por:

$$C_{global} = T_{\sigma}^{-1} C_{local} T_{\varepsilon} \quad (21)$$

Onde:

$C_{global}$  = Matriz de rigidez nas coordenadas globais  
 $T_{\sigma}^{-1}$  = Matriz inversa de transformação de tensões  
 $C_{local}$  = Matriz de rigidez nas coordenadas locais  
 $T_{\varepsilon}$  = Matriz de transformação de deformações

Devido à ortogonalidade das matrizes,  $T_{\sigma}$  e  $T_{\varepsilon}$  possuem a seguinte relação:

$$T_{\sigma}^{-1} = T_{\varepsilon}^T \quad (224)$$

Onde:

$T_{\sigma}^{-1}$  = Matriz inversa de transformação de tensões



$T_{\varepsilon}^T$  = Matriz transposta de transformação de deformações

Isso significa que a Equação 21 pode ser escrita da seguinte forma:

$$(235) \quad C_{global} = T_{\varepsilon}^T C_{local} T_{\varepsilon}$$

Onde:

$C_{global}$  = Matriz de rigidez nas coordenadas globais  
 $T_{\varepsilon}^T$  = Matriz transposta de transformação de deformações  
 $C_{local}$  = Matriz de rigidez nas coordenadas locais  
 $T_{\varepsilon}$  = Matriz de transformação de deformações

Sendo a matriz transformada T escrita da seguinte forma:

$$(246) \quad T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_2l_3 & 2l_3l_1 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 2m_2m_3 & 2m_3m_1 & 2m_1m_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & 2n_2n_3 & 2n_3n_1 & 2n_1n_2 \\ m_1n_1 & m_2n_2 & m_3n_3 & m_2n_3 + m_3n_2 & m_1n_3 + m_3n_1 & m_1n_2 + m_2n_1 \\ n_1l_1 & n_2l_2 & n_3l_3 & n_2l_3 + n_3l_2 & n_1l_3 + n_3l_1 & n_1l_2 + n_2l_1 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_3m_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & l_1m_3 + l_3m_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix}$$

Onde:

$T_{\varepsilon}$  = Matriz de transformação de deformações  
 $l_i$  = Cossenos diretores relacionados entre o eixo x global e x, y e z locais  
 $m_i$  = Cossenos diretores relacionados entre o eixo y global e x, y e z locais  
 $n_i$  = Cossenos diretores relacionados entre o eixo z global e x, y e z locais

## 2.2. Desenvolvimento do aplicativo computacional

Após a conceituação do procedimento de cálculo, é possível estruturar o código que será responsável pela determinação das constantes elásticas, sendo este procedimento realizado aos poucos para a certificação de que cada matriz calculada corresponde aos valores obtidos através de cálculos experimentais. Uma vez que isso seja feito, os cálculos das constantes elásticas finalmente pode ser realizado.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considerando o caso de um compósito unidirecional de fibras de carbono/epóxi, o cosseno diretor será :

Para a direção 1:

$$\text{Diagonal da base} = \sqrt{a^2 + a^2} = 1$$

$$\text{Diagonal} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = 1$$

$$\theta = \text{asin}(a_3/\text{diagonal}) = \text{asin}(0/1) = 0$$

$$\varphi = \text{acos}(a_1/\text{diagonal da base}) = \text{acos}(1/1) = 0$$

Onde  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são os cossenos diretores associados à direção das fibras.

De posse destes valores, encontraremos os cossenos diretores:

$$l_1 = a_1/\text{diagonal} = 1/1 = 1$$

$$l_2 = a_2/\text{diagonal} = 0/1 = 0$$

$$l_3 = a_3/\text{diagonal} = 0/1 = 0$$

Devido ao grau de liberdade para calcular  $n_3$ , podemos calculá-lo:

$$n_3 = \cos\theta = \cos 0 = 1$$

$$aa = l_2^2 + l_1^2 = 0 + 1 = 1$$

$$bb = 2 * l_2 * l_3 * n_3 = 2 * 0 * 0 * 1 = 0$$

$$cc = l_3^2 * n_3^2 + l_1^2 * n_3^2 - l_1^2 = 0 * 1 + 1 * 1 - 1 = 0$$

$$n_2 = -bb/(2*aa) = 0$$

$$n_1 = \sqrt{1-n_3^2} = \sqrt{1-1} = 0$$

$$m_1 = l_3 * n_2 - l_2 * n_3 = 0 * 0 - 0 * 1 = 0$$

$$m_2 = l_3 * n_1 - n_3 * l_1 = 0 * 0 - 1 * 1 = -1$$

$$m_3 = n_1 * l_2 - n_2 * l_1 = 0 * 0 - 0 * 1 = 0$$

Então, os cossenos diretores referentes ao compósito unidirecional (vareta) na célula unitária), para o compósito unidirecional são os seguintes:

$$1, 0, 0 \quad (l_1, m_1, n_1)$$

$$0, 1, 0 \quad (l_2, m_2, n_2)$$

$$0, 0, 1 \quad (l_3, m_3, n_3)$$

Então, o resultado da matriz transformada (24) será :

$$l_1^2 = 1 \quad m_2^2 = 1 \quad n_3^2 = 1$$

$$m_2 n_3 + m_3 n_2 = 1 * 1 + 0 = 1$$

$$n_1 l_3 + n_3 l_1 = 0 + 1 * 1 = 1$$

$$l_1 m_2 + l_2 m_1 = 1 * 1 + 0 = 1$$

Portanto, a matriz transformada para o compósito unidirecional é única. Aplicando a Equação (25), pode-se obter a matriz de rigidez global para o compósito.

$$C_{global} = T_{\varepsilon}^T C_{local} T_{\varepsilon}$$

(257)

Onde:

$C_{global}$  = Matriz de rigidez nas coordenadas globais

$T_{\varepsilon}^T$  = Matriz transposta de transformação de deformações

$C_{local}$  = Matriz de rigidez nas coordenadas locais

$T_{\varepsilon}$  = Matriz de transformação de deformações

$$C_{global} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 141,98 & 3,98 & 3,80 & 0 & 0 & 0 \\ 3,98 & 10,89 & 4,42 & 0 & 0 & 0 \\ 3,80 & 4,42 & 10,89 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,54 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_{global} = \begin{vmatrix} 141,98 & 3,98 & 3,80 & 0 & 0 & 0 \\ 3,98 & 10,89 & 4,42 & 0 & 0 & 0 \\ 3,80 & 4,42 & 10,89 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,54 \end{vmatrix}$$

Obtendo-se a matriz inversa, matriz de flexibilidade global, resulta na expressão :

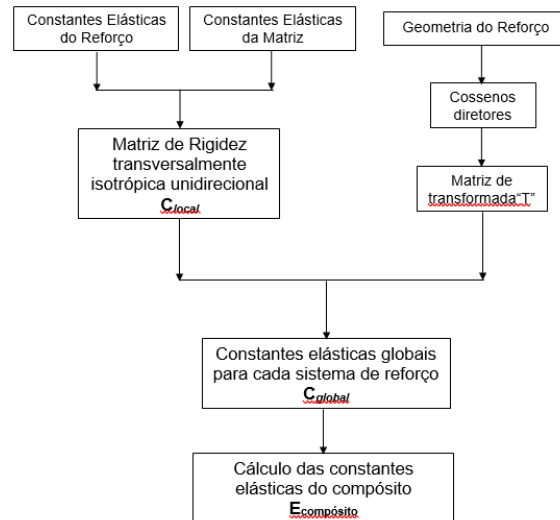
$$S_{global} = \begin{vmatrix} 0,0071 & -0,0019 & -0,0017 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0019 & 0,1104 & -0,0441 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0017 & -0,0441 & 0,1103 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2824 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2564 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2824 \end{vmatrix}$$

Desta expressão obtém-se as constantes elásticas, conforme a seguir.

0,0071 = 1/Ex, logo:	Ex = 140,84
0,1104 = 1/Ey, logo:	Ey = 9,05
0,1103 = 1/Ez, logo:	Ez = 9,06
0,2824 = 1/Gxy, logo:	Gxy = 3,54
0,2564 = 1/Gyz, logo:	Gyz = 3,9
0,2824 = 1/Gxz, logo:	Gxz = 3,54
-0,0019 = -vxy/Ex, logo:	vxy = 0,2675
-0,0017 = -vxz/Ex, logo:	vxz = 0,2394
-0,0441 = -vzy/Ez, logo:	vzy = 0,3995/9,06*9,05 = 0,3991

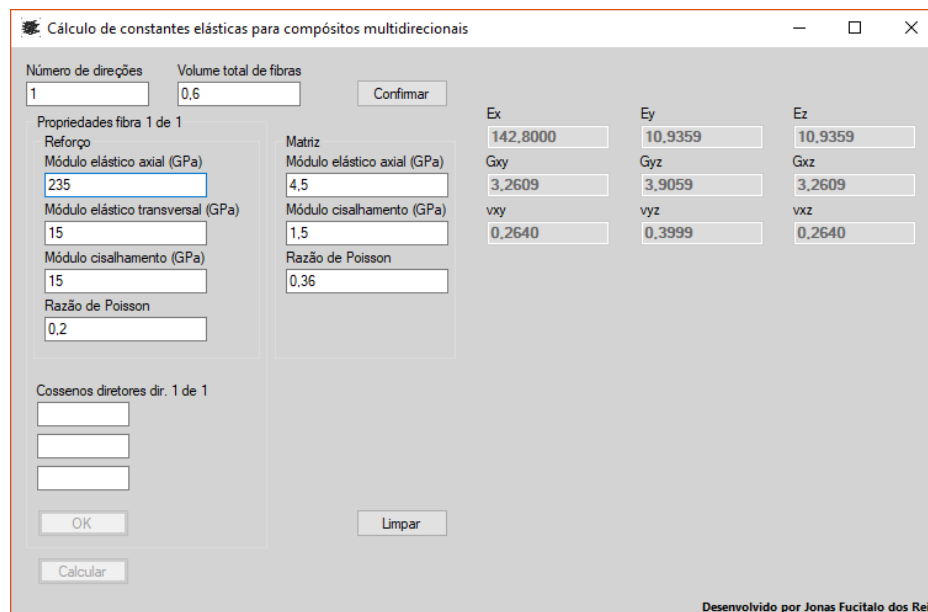
### 3.1. Utilização do aplicativo computacional

Uma vez que os procedimentos para o cálculo das constantes elásticas foram compreendidos, foi possível iniciar o desenvolvimento do aplicativo computacional para a estimativa das constantes elásticas dos compósitos multidirecionais com o auxílio do diagrama de blocos da Figura 5. A linguagem de programação para o desenvolvimento do mesmo foi VB.net.



**Figura 5.** Diagrama simplificado relativo ao procedimento de cálculo da matriz de rigidez em compósitos.

Tendo o aplicativo computacional sido desenvolvido, o procedimento para a sua utilização consiste de digitar o número de direções do compósito, o volume relativo total de fibras, as propriedades da fibra de reforço e da matriz e por fim os cossenos diretores associados a cada direção, gerando as constantes elásticas do material na tela e escrevendo as matrizes calculadas em um arquivo texto. A Figura 6 mostra a utilização do aplicativo para o cálculo de um compósito unidirecional. Verifica-se que os valores obtidos foram próximos dos cálculos experimentais.



**Figura 6.** Aplicativo computacional desenvolvido.

#### 4. CONCLUSÃO

Foram realizados cálculos experimentais para compreensão do procedimento para se obter as constantes elásticas dos materiais compósitos. Através destes cálculos, o software foi desenvolvido



e verificado se seu comportamento coincidiu com o esperado. Com isso, se obteve um software que realiza as funções esperadas, com uma interface gráfica auxiliando o uso do mesmo.

## 5. REFERÊNCIAS

DANIEL, I. M.; ISHAI, O. *Engineering mechanics of composite materials*. Nova Iorque: Oxford University Press, 2006.

MOHITE, P. M. *Composite materials and structures*. Kanpur: Aerospace Engineering IIT Kanpur, 2012.

LARA-CURZIO, E; JENKINS, M.G. Development of test standards for continuous fiber ceramic composites in the United States. *Composites: Part A* 30 (1999) 561–567

PASTORE, C. M. ; GOWAYED, Y. A., "A Serf-Consistent Fabric Geometry Model: Modification and Application of a Fabric Geometry Model to Predict the Elastic Properties of Textile Composites," *Journal of Composites Technology & Research, JCTRER*, Vol. 16, No. 1, January 1994, pp. 32-36.